Om Anvendelse

af

mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en „systematisk“ Karakter.

af

T. N. Thiele.

Vidensk. Selsk. Skr., 5. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. XII. 5.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1880.

Nutidens Astronomi maa, andre vigtige Fænomener ufortalt, væsentlig karakteriseres ved den Kamp, som den fører mod de systematiske Fejl.

Betegnelsen «systematiske Fejl» bruges i Modsætning baade til de tilfældige Fejl og til dem, som man kan afhjælpe ved at beregne Korrektioner, fordi man kjender Fejlkildernes Natur og Virkemaade. Men disse Modsætninger ere noget ubestemte. Der gives Fejl, om hvis egentlige Aarsag man kan være i Tvivl endnu længe efter, at man har fundet den mathematiske Lov, der fremstiller dem som Funktion af en eller anden Omstændighed ved Observationerne. Og at Grændserne overfor de tilfældige Fejl er usikker ligger ikke blot deri, at det kan være tvivlsomt, om man overhovedet nogensinde med fuld Ret kan tale om Tilfældighed ved Fejl. Den tekniske Betegnelse «tilfældige Fejl» defineres nemlig dels derved, at man ikke ved at sammenstille de ved Observationens Gjentagelse fundne Resultater med nogen apriorisk angivelig Omstændighed ved Observationerne, maa kunne paavise en Relation mellem Fejlene og en saadan Omstændighed; dels i positiv Form derved, at det, for at Fejlene skulle kunne behandles som tilfældige, kræves, at de, naar man ordner dem efter deres Størrelse, og naar Gjentagelsernes Antal blot er tilstrækkeligt stort, skulle aabenbare Tilstedeværelsen af en Fejllov, der sætter Hyppigheden af Fejl, der falde mellem vilkaarligt valgte Grændser, i Relation til selve disse Grændser.

Nogle ville maaske som yderligere Definition paa de tilfældige Fejl kræve, at denne Fejllov skal antage en vis særlig Funktionsform, den exponentielle

$$\varphi(x) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{m}\right)^2}$$

hvor x_0 er den rimeligste Værdi, m Middelfejlen. Men selv om man ikke vil henregne saadanne Fejl til de systematiske, hvor Fejlloven blot er en anden end denne exponentielle, der er Forudsætningen for en direkte Anvendelse af mindste Kvadraters Methode, saa forekommer der Tilfælde, hvor Grændsen mellem de to Slags Fejl kan være meget tvivlsom.

Paa flere Omraader navnlig ved de saakaldte personlige Fejl, der synes at have en eller anden fysiologisk Oprindelse, og ved Observationsrækker til Bestemmelse af de Værdier, der bestemme Ejendommelighederne ved et Instruments Opstilling eller Virkemaade, og som jeg her vil kalde Instrumentkonstanter, forsaavidt de skulde været konstante, dersom Instrumentet var fuldkomment, forekomme saadanne Tilfælde, hvor det kun altfor aabenbart er umuligt at karakterisere de forskjellige Fejls Hyppighed ved en Fejllov, og hvor der, naar man ordner Observationerne af den samme Værdi kronologisk, synes at vise sig en Afhængighed mellen. Observationstiden og Fejlenes Beløb, saa at man altsaa ialtfald foreløbigt kunde være berettiget til at kalde Fejlene systematiske. Men naar man saa har søgt at korrigere saadanne Fejl under den Antagelse, at de vare mathematiske Funktioner af Observationstiden, saa er Haabet om ad denne Vej at befri Observationerne fra de pinlige systematiske Fejl ideligt blevet skuffet. Naar man troede at have fundet den befriende Korrektionsformel og prøvede den paa tilstrækkeligt langt fortsatte Observationsrækker, viste det sig bestandigt, at det var umuligt at fremstille Fejlene som Funktioner af Tiden eller ialtfald at bruge Formelen til Forudberegning af personlige Observationsfejl eller Instrumentkonstanterne.

Det turde være, at man i saadanne Tilfælde ofte vil komme til mere tilfredsstillende Resultater ved en nøjere Prøvelse af disse Fejls Forhold til de tilfældige Fejl. Ere de omtalte Fejl end ikke ligefrem tilfældige Fejl, saa er det ialtfald muligt, at de kunne være Resultatet af en Samvirken af flere tilfældige Fejlkilder, thi den velbekjendte Sætning, at en Kombination af forskjellige tilfældige Fejlkilder, hver med sin Fejllov, kan fremstilles som en enkelt tilfældig Fejlkilde med sin af de øvrige afhængige Fejllov, har en Undtagelse, som ikke synes altid at være bleven tilstrækkeligt paaagtet. Sætningen gjælder ikke, naar nogen af Fejlkilderne virker paa en saadan Maade, at flere end een af de iøvrigt indbyrdes uafhængige Observationer paavirkes af hver enkelt Fejl, som flyder af den paagjældende Fejlkilde. Lad os f. Ex. antage, at en Række Værdier $o_1, o_2, o_3 \dots . o_n$, der i og for sig kunde været opfattede som den egentlige Gjenstand for Observationerne, ved en tilfældig Fejlkildes Indflydelse have faaet Tillægene $e'_1, e'_2 \dots . e'_n$ efter en Fejllov, der kan antages at være exponentiel, at man imidlertid ikke opfatter selve o'erne som Observationens Gjenstand, men derimod de successive Summer af de efter Indices ordnede o'er altsaa

$$
\begin{aligned}
O_1 &= o_1 \\
O_2 &= o_1 + o_2 \\
&\dots\dots\dots \\
O_n &= o_1 + o_2 + \dots o_n,
\end{aligned}
$$

og at man ovenikjøbet nødsages til at vælge denne Opfattelse, fordi andre væsentlige tilfældige Fejlkilder netop paavirke disse Summer med tilfældige Fejl $e''_1, e''_2, \dots e''_n$ efter anden Fejllov, som vi ogsaa kunne antage for exponentiel, da ville Totalfejlene altsaa

$$\left.\begin{array}{l} e''_1 + e'_1 \\ e''_2 + e'_1 + e'_2 \\ \dots\dots\dots \\ e''_n + e'_1 + e'_2 + \dots e'_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

i Almindelighed hverken følge den exponentielle eller overhovedet nogensomhelst Fejllov, men derimod, naar de ordnes efter Indices for e'' frembyde Ejendommeligheder, der i høj Grad ligne, hvad man ser ved de ovenfor omtalte kronologisk ordnede Oversigter over personlige Fejl eller Resultater af Iagttagelser over Instrumentkonstanter. Der er ogsaa ret gode indre Grunde til at forklare de omtalte Fænomener paa denne eller lignende Maade ved en Komplikation af tilfældige Fejl, og i denne Henseende er Forholdet vel omtrent det samme for de personlige Fejl og Fejlene ved Instrumentkonstanterne, da Sandseorganerne jo kunne betragtes som Instrumenter. Fejlene ville dels være saadanne Opfattelsesfejl, som paa tilfældig Maade maa antages at vexle fra den ene Observation til den anden ligesom Fejlene e'' i vort Exempel, dels saadanne som med Nødvendighed betinges af Instrumentets tilfældige Tilstand i Observationens Øjeblik, forsaavidt denne ikke lader sig beregne efter Omstændigheder saasom Temperatur og Lufttryk etc.

Hvad nu Instrumentets Tilstand angaar, vil man, saalænge samme Instrument benyttes, ingenlunde kunne se bort fra en Afhængighed af Tilstanden i det foregaaende Øjeblik. Vistnok kan der for mange Instrumenters Vedkommende paavises en Normaltilstand, fra hvilken Instrumentet ikke kan fjerne sig mere end, at det altid holder sig indenfor visse Grændser, og rimeligvis vil der da hyppigt, naar Instrumentet er bragt ud af den normale Stilling, være større Sandsynlighed for en Tilnærmelse til det normale end for en yderligere Afvigelse. Dog har jeg en stærk Tilbøjelighed til at antage, at saadanne tilfældige Variationer af et Instrument, som lade det svinge omkring en Normalstilling som den til enhver Tid sandsynligste Stilling (hvorved disse Fejl vilde forbinde sig med Opfattelsesfejlene e''), ville være temmelig sjeldne, ialtfald ikke saa hyppige som saadanne Variationer, hvor Normaltilstandens Indflydelse er umærkelig, og hvor et «status qvo» er Reglen, idet Instrumentets tilfældige Variationer ske saaledes, at Tilstanden i det ene Øjeblik er den rimeligste Tilstand i næste Øjeblik, Følgen heraf bliver, at Fejlene summere sig saaledes som e'. Endnu en tredie Slags Instrumentvariationer bør vel nævnes som typisk ved Siden af disse, nemlig saadanne, hvor den faktiske Tilstand i ethvert Øjeblik er lig med Middeltallet mellem den faktiske Tilstand i foregaaende Øjeblik og den rimeligste Tilstand i næste; et saadant Forhold kan vel vanskeligt tænkes ved Instrument k o n s t a n t e r, ved Uhret turde det derimod spille en Hovedrolle og lade Fejlene i Uhrets Gang virke gjennem en dobbelt Summation.

Jeg har forsøgt at udvikle Theorien for Fejl, der paa den i (1) angivne Maade opstaa af to Fejlkilder, og haaber derved at bidrage noget til at reducere Omraadet for de systematiske Fejl. Ganske vist vil der være ulige større Fordel forbundet med at lære at beregne de Korrektioner, hvormed de systematiske Fejl helt kunne hæves, end ved blot at henføre dem til de tilfældige Fejls Omraade og aabne Udveje for Anvendelse af mindste Kvadraters Methode paa Tilfælde, hvor den forud ikke kunde anvendes; men det er ikke ethvert Onde, som kan rykkes op med Rode, og det turde vel være muligt, at man hist og her har med Fejl at gjøre, hvor Betingelsen for at udfinde de virkende Fejlkilder og deres Love, netop er at dele de iagttagne Fejl i to Dele, saadanne, som paa indbyrdes uafhængig Maade paavirke de enkelte Observationer, og saadanne, som virke gjennem Ophobning.

At dette er muligt, fremgaar af, at der forlængst foreligger en Løsning af Opgaven for et specielt Tilfælde. Er en saadan Observationsrække ved lange Mellemtider inddelt i et Antal Grupper af Observationer, og følge derimod i hver Gruppe de enkelte Observationer saa hurtigt efter hinanden, at man næsten kan anse dem for samtidige, da har Opgaven ingen Vanskelighed; af Gjentagelserne indenfor de enkelte Grupper beregnes de Middeltal, som angive de rimeligste Værdier indenfor Grupperne, og tillige de Middelfejl, som maa ventes saavel i disse Middeltal som i hver enkelt Observation; ved Siden deraf skaffer man sig Kundskab om saadanne rimeligste Værdier, der skulle falde i Mellemrummene mellem Grupperne ved Interpolation under Forudsætning af jevn Forandring fra den foregaaende iagttagne Gruppe til den næste, og Differenserne, som ere opstaaede i de lange Mellemtider, vil man vide at benytte til Bedømmelse af Instrumentets Stabilitet. Opgaven maa da ogsaa kunne løses, hvor Mellemrummene udfyldes med spredte Observationer, og hvor Gjentagelserne i de enkelte Grupper efterhaanden blive mindre og mindre talrige. Forskjellen kan kun være den, at det saa bliver noget vanskeligere at udlede de ønskede Resultater.

Principet for Løsningen af disse Opgaver er ingenlunde kunstigt: Man skal blot ved at sætte Opgaven i Ligning medtage enhver Ligning, der hører med til den fuldstændige Beskrivelse af de formodede Forhold, og ikke tillade sig at borteliminere nogetsomhelst paa anden Maade end efter Forskrifterne for mindste Kvadraters Methode. Det bør maaske allerede her bemærkes, at det analytiske Hjælpemiddel, hvorved Løsningen her iværksættes, en Kjædebrøk, vel er noget usædvanligt i praktisk astronomisk Regning, men paa ingen Maade ubekvemt.

Udjevning af en Række Observationer af en Instrumentkonstant. Vi antage et Instrument indrettet efter en saadan Plan, at et Forhold ved det, som udtrykkes ved Tallet x burde været konstant, medens dog i Virkeligheden x lider en Række Forandringer enten stadigt eller i bekjendte Øjeblikke. Vi forudsætte endvidere, at hver af disse Forandringer er rent tilfældig og følger en exponentiel Fejllov, bestemt derved, at x's Værdi til hver Tid er den rimeligste Værdi for næste Øjeblik, medens Middelfejlen eller rettere Middelværdien af de momentane Forandringer, μ, kjendes. Betegne vi da med x_0, $x_1 \dots x_n$ de Værdier, som x maa antages at have havt til en Række Tidspunkter t_0, $t_1 \dots t_n$ (enten bestandig t_{a+1} senere end t_a eller bestandig forud for t_a), i hvilke der enten er anstillet Observationer over x, eller for hvilke man overhovedet ønsker at kjende x, da vil efter Forudsætningen 0 være den rimeligste Værdi for enhver Differens $x_{a+1} - x_a$; og Kvadratet paa Middelafvigelsen for denne Differens vil være $\underset{a,a+1}{m^2} = \Sigma\mu^2$ (imellem Grændserne a og $a+1$), og de absolute Vægte $\underset{a,a+1}{v} = \frac{1}{\underset{a,a+1}{m^2}}$, disse anse vi altsaa som bekjendte. Saaledes faa vi n Ligninger

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_0 = 0, \text{ Vægt } \underset{0,1}{v} \\ x_2 - x_1 = 0, \text{ Vægt } \underset{1,2}{v} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n - x_{n-1} = 0, \text{ Vægt } \underset{n-1,n}{v} \end{array}\right\} \quad (2).$$

Endvidere forudsætte vi, at de til Tiderne $t_0, t_1 \dots t_n$ anstillede Observationer over x ogsaa lide af tilfældige Fejl efter exponentielle Fejllove, i Henhold til hvilke vi i Observationsresultaterne henholdsvis $z_1, z_2 \dots z_n$ kjende de rimeligste Værdier (før Udjevningen) og derhos vide, at Middelfejlene ere $m_1, m_2 \dots m_n$ eller Vægtene $v_1, v_2 \dots v_n$, almindeligt $v_a = \frac{1}{m_a^2}$. Derved faa vi $n+1$ Ligninger.

$$\left.\begin{array}{l} z_0 - x_0 = 0, \text{ Vægt } v_0 \\ z_1 - x_1 = 0, \text{ Vægt } v_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n - x_n = 0, \text{ Vægt } v_n \end{array}\right\} \quad (3),$$

som tilligemed (2) indeholde alle de indbyrdes uafhængige Betingelser, vi have til Bestemmelse af de $n+1$ Ubekjendte $x_0, x_1 \dots x_n$, som det er vor nærværende Opgave at finde tilligemed deres Middelfejl efter Udjevningen.

Anm. Forsaavidt der blandt Tiderne, t, findes nogle, i hvilke ingen virkelig Observation er anstillet, og for hvilke vi blot begjære at kjende de rimeligste Værdier af x, bør vi sætte de tilsvarende Vægte $v = 0$, hvorefter Værdierne z blive arbitrære (blot ikke uendelige).

Behandles nu (2) og (3) efter mindste Kvadraters Methode, saa fremgaar der af dem de $n+1$ Ligninger:

$$\left.\begin{array}{ll} v_0 z_0 & = (v_0 + \underset{0,1}{v})x_0 - \underset{0,1}{v}\, x_1 \\ v_1 z_1 & = -\underset{0,1}{v}\, x_0 + (\underset{0,1}{v} + v_1 + \underset{1,2}{v})x_1 - \underset{1,2}{v}\, x_2 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_a z_a & = -\underset{a-1,a}{v}\, x_{a-1} + (\underset{a-1,a}{v} + v_a + \underset{a,a+1}{v})\, x_a - \underset{a,a+1}{v}\, x_{a+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{n-1} z_{n-1} & = -\underset{n-2,n-1}{v}\, x_{n-2} + (\underset{n-2,n-1}{v} + v_{n-1} + \underset{n-1,n}{v})\, x_{n-1} - \underset{n-1,n}{v}\, x_n \\ v_n z_n & = -\underset{n-1,n}{v}\, x_{n-1} + (\underset{n-1,n}{v} + v_n)x_n \end{array}\right\} \quad (4).$$

Blandt disse Ligninger bør vi nu allerførst eliminere de x_a'er som svare til $v_a = 0$, altsaa til fiktive Observationer, som kun ere medtagne af Hensyn til Bestemmelsen af x's Værdi udenfor de virkelige Observationstider. Men $v_a = 0$ medfører

$$(x_a - x_{a-1}) : \frac{1}{v_{a-1,a}} = (x_{a+1} - x_a) : \frac{1}{v_{a,a+1}} = (x_{a+1} - x_{a-1}) : \left(\frac{1}{v_{a-1,a}} + \frac{1}{v_{a,a+1}}\right) \qquad (5),$$

saa at altsaa, naar først x_{a-1} og x_{a+1} ere fundne, x_a vil bestemmes ved simpel Interpolation imellem disse Værdier under Forudsætning om, at Forandringerne i x ere omvendt proportionale med Vægtene mellem det paagjældende Intervals Grændser eller ligefremt proportionale med Middelafvigelsernes Kvadrat, eller med selve Tidsintervallet, forsaavidt der i hvert Øjeblik har været ligestor Udsigt til en Forrykkelse af Instrumentet. Dersom den første eller sidste Observation z_0 eller z_n var fiktiv, altsaa hvis der spørges om Instrumentkonstantens Værdier før og efter det Tidsrum, hvori der er observeret, da medfører $v_0 = 0$ at $x_0 = x_1$, $v_n = 0$ at $x_n = x_{n-1}$, altsaa ere de x'er, som faas for den første og sidste virkelige Observationstid, de rimeligste Værdier henholdsvis i Fortid og Fremtid.

Ligningerne (4) vise derhos, hvad der ogsaa er aldeles selvfølgeligt, at Eliminationen af x_a, naar $v_a = 0$, ikke forandrer disse Ligninger anderledes, end at det Resultat kommer frem, som man strax vilde have faaet ved at udelade de Ligninger, der angaa den fiktive Observation, man havde da blot havt at sætte

$$m^2_{a-1,a+1} = m^2_{a-1,a} + m^2_{a,a+1}$$

eller

$$v_{a-1,a+1} = \frac{v_{a-1,a}\, v_{a,a+1}}{v_{a-1,a} + v_{a,a+1}}$$

og direkte at gaa over fra Ligningen

$$v_{a-1} z_{a-1} = -v_{a-2,a-1}\, x_{a-2} + (v_{a-2,a-1} + v_{a-1} + v_{a-1,a+1})\, x_{a-1} - v_{a-1,a+1}\, x_{a+1}$$

til

$$v_{a+1} z_{a+1} = -v_{a-1,a+1}\, x_{a-1} + (v_{a-1,a+1} + v_{a+1} + v_{a+1,a+2})\, x_{a+1} - v_{a+1,a+2}\, x_{a+2}$$

med Forbigaaelse af Ligningen for $v_a z_a$. Vi kunne altsaa, naar Talen er om Beregning af virkelige Exempler, strax forudsætte, at der ikke er medtaget nogen fiktiv Observation, og vide altsaa nu, hvorledes man af de x'er, som findes svarende til virkelige Observationstider kan finde x for en hvilkensomhelst anden Tid.

Den videre Behandling af Ligningerne (4) bør naturligvis foretages paa den for mindste Kvadraters Methode typiske Maade, men dette lettes her ved Ligningernes forholdsvis simple Form, og for at drage Fordel af denne og fremstille Løsningen strax i den for Beregningen heldigste Form maa der indføres nogle Hjælpestørrelser. For det første bør vi istedetfor Vægtene v_a og $v_{a,a+1}$ indføre to andre Rækker Tal, bestemte ved Recursionsformlerne:

$$u_{a+1} = v_{a+1} + \underset{a,a+1}{u} \tag{6}$$

og

$$\frac{1}{\underset{a,a+1}{u}} = \frac{1}{\underset{a,a+1}{v}} + \frac{1}{u_a} \tag{7}.$$

Under Forudsætning af at $u_0 = v_0$, beregnes let u_a og $\underset{a,a+1}{u}$ indtil $\underset{n-1,n}{u}$ og u_n ved Brug af en Tabel over reciproke Tal. (Derved behøves ikke nogen større Nøjagtighed i Regningen, end hvad der virkeligt har Betydning i de givne Vægte.)

Dernæst beregnes af z'erne en Række Værdier $y_0, y_1 \ldots y_n$, der i den yderligere Regning skulle erstatte z'erne, og hvoraf tillige enhver vil vise sig at repræsentere den tilsvarende Værdi for x under Forudsætning, at alle Observationer med højere Indices lodes ude af Betragtning, altsaa ialtfald $y_n = x_n$. Saadanne y'er findes ved Recursionsformlen (for voxende Indices)

$$u_{a+1} y_{a+1} = \underset{a,a+1}{u} y_a + v_{a+1} z_{a+1}$$

eller noget bekvemmere

eller

$$\left.\begin{aligned} u_{a+1}(y_{a+1} - y_a) &= v_{a+1}(z_{a+1} - y_a) \\ u_{a+1}(y_{a+1} - z_{a+1}) &= \underset{a,a+1}{u}(y_a - z_{a+1}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

i Forbindelse med $y_0 = z_0$.

Ved disse Substitutioners Anvendelse paa (4) vil man da finde, at x'erne bestemmes ved Recursionsformlen (for aftagende Indices)

$$u_a y_a = (u_a + \underset{a,a+1}{v}) x_a - \underset{a,a+1}{v} x_{a+1} \tag{9}$$

eller med bekvemmere Regning,

eller

$$\underset{a,a+1}{v}(x_a - x_{a+1}) = \underset{a,a+1}{u}(y_a - x_{a+1}) \tag{9 a}$$

$$u_a(x_a - y_a) = \underset{a,a+1}{u}(x_{a+1} - y_a) \tag{9 b}$$

i Forbindelse med $x_n = y_n$.

At dette ikke blot er rigtigt, men tillige at (9) netop er den typiske Form for Resultatet af Eliminationen efter mindste Kvadraters Methode, bevises ved det almindelige Induktionsbevis. Thi for $a = 0$ stemmer (9) med den første Ligning (4), og antages det, at (9) er gyldig for alle Indices til a, altsaa at Eliminationen af $x_0, x_1 \ldots x_{a-1}$ har ført til et Restsystem af $n - a + 1$ Ligninger, nemlig (9) og de $n - a$ sidste under (4), saa vil Eliminationen (paa typisk Maade) af x_a imellem de to første af disse Ligninger

$$u_a y_a = (u_a + \underset{a,a+1}{v}) x_a - \underset{a,a+1}{v} x_{a+1}$$

$$v_{a+1} z_{a+1} = -\underset{a,a+1}{v} x_a + (\underset{a,a+1}{v} + v_{a+1} + \underset{a+1,a+2}{v}) x_{a+1} - \underset{a+1,a+2}{v} x_{a+2},$$

de eneste, hvori x_a endnu forekommer, ske ved Multiplikation af den første Ligning med

$$\frac{\underset{a,\,a+1}{v}}{u_a + \underset{a,\,a+1}{v}} = \frac{\underset{a,\,a+1}{u}}{u_a} \qquad \text{(se (7))}$$

og Addition af Resultatet til den anden af disse Ligninger, derved fremkommer ifølge (7)

$$\underset{a,a+1}{u}\, y_a + v_{a+1} z_{a+1} = (\underset{a,a+1}{u} + v_{a+1} + \underset{a+1,a+2}{v})\; x_{a+1} - \underset{a+1,a+2}{v}\; x_{a+2}$$

altsaa ifølge (8) og (6)

$$u_{a+1} y_{a+1} = (u_{a+1} + \underset{a+1,a+2}{v})\; x_{a+1} - \underset{a+1,a+2}{v}\; x_{a+2},$$

hvis Overensstemmelse med (9) beviser Sætningens Rigtighed, naar blot $a < n$. Det ses derhos let nok, at den allersidste Elimination (af x_{n-1}) fører til $u_n y_n = u_n x_n$.

Udvikler man i Henhold til (6) og (7) det explicite Udtryk for u_n, findes Kjædebrøken

$$u_n = v_n + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\underset{n-1,\,n}{v}} + \cfrac{1}{v_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\underset{n-2,\,n-1}{v}} + \cdots \cfrac{1}{v_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{v_{12}} + \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\underset{0,1}{v}} + \cfrac{1}{v_0}}}}}}}} \tag{10}$$

og bortkaster man af denne et Antal af de første Led, ville Slutningskjædebrøkerne afvexlende være u_a og $\frac{1}{\underset{a,a+1}{u}}$.

Efter den Betydning, denne Kjædebrøk har for vor Opgave, kan det med Sikkerhed siges, at specielle simplere Løsninger kun ville forekomme, hvor denne Kjædebrøk antager en simplere Form, og at altsaa Approximativløsninger med lettere Regning kun gives i saadanne Tilfælde, der nærme sig til disse. Som saadanne kunde man vel først tænke paa det, hvor Kjædebrøken blev periodisk, dog viser dette Tilfælde sig ikke ledsaget af Lettelser i den praktiske Beregning. Saadanne faas derimod i det Tilfælde, at Kjædebrøken afbrydes derved, at en partiel Nævner bliver uendelig, altsaa enten $v_a = \infty$ eller $\underset{a,a+1}{v} = 0$, og i det, hvor Kjædebrøken kan sammendrages til færre Led, fordi en partiel Nævner forsvinder, altsaa enten $v_a = 0$ eller $\underset{a,a+1}{v} = \infty$.

Naar enten en Observation kan anses for fejlfri, $v_a = \infty$, eller Observationsrækken afbrydes ved et langt Mellemrum eller et Mellemrum, hvori man maa frygte, at Instrumentet har lidt en Forstyrrelse, $\underset{a,a+1}{v} = 0$, da afbrydes i begge Tilfælde Kjædebrøken eller deler sig i tvende indbyrdes uafhængige Kjædebrøker. Dermed deles tillige x'ernes Beregning, i første Tilfælde saaledes, at $\underset{a,a+1}{u} = \underset{a,a+1}{v}$ og $z_a = y_a = x_a$, altsaa saaledes, at de to Rækker forbindes med Fælledsværdien $x_a = z_a$; i andet Tilfælde saaledes, at $u_{a+1} = v_{a+1}$ og $x_a = y_a$, men $y_{a+1} = z_{a+1}$, saa at altsaa Delene falde fuldstændigt ud fra hinanden og adskilles med idetmindste en mellemliggende Værdi af x, om hvilken ingen Bestemmelse kan faas. Saadanne Delinger vilde i mange andre Tilfælde kunne medføre stor Fordel i den praktiske Regning; her er dog Udbyttet derved ikke stort, thi man vil næsten altid kunne dele Regningen arbitrært uden større Ulempe, end at en ringe Dobbeltregning af u'erne, y'erne og x'erne nærmest omkring Delingsstedet, hurtigt vil føre til en Sammenknytning af Regninges Dele derved, at de nye Værdier vise sig overensstemmende med dem, som man havde fundet gjennem Delingen. Kun viser nærværende Betragtning, at man, naar Valget er frit, bør dele enten saaledes, at en paalidelig Værdi af z medtages i begge Stykkerne, eller saaledes, at man afbryder paa et Sted, hvor der er et stort Mellemrum mellem to konsekutive Observationer, af hvilke den første gjøres til Slutning af første Afdeling, den anden til Begyndelse af den følgende Afdeling.

Angaaende de Tilfælde, hvor Kjædebrøkens Antal Led kan formindskes, kunne vi indskrænke os til Tilfældet $\underset{a,a+1}{v} = \infty$, da vi allerede fra et andet Synspunkt have betragtet Tilfældet $v = 0$ og seet, at man, hvor det gjælder om at finde x for et Tidspunkt, hvorfor der ingen Observation foreligger (eller kun saadanne upaalidelige Observationer, hvis Vægt bør sættes forsvindende lille), er henvist til at beregne de rimeligste Værdier ved simpel Interpolation mellem den nærmest foregaaende og paafølgende virkelige Observationstid, under Forudsætning af jevn Forandring i Instrumentet. Er derimod $\underset{a,a+1}{v} = \infty$, hvad der forudsætter, at Observationstiderne t_a og t_{a+1} følge saa hurtigt efter hinanden, at Instrumentet ikke kan antages at have forandret Stilling i Mellemtiden, da er det i sig selv indlysende, at man er berettiget til med tilbørligt Hensyn til Vægtene at sammendrage saadanne konsekutive Observationer til Middeltal, og altsaa betragte

$$\frac{v_a z_a + v_{a+1} z_{a+1}}{v_a + v_{a+1}} \text{ med Vægten } v_a + v_{a+1}$$

som observeret istedenfor z_a og z_{a+1}; dette bekræftes ogsaa af vor Theori, som for $\underset{a,a+1}{v} = \infty$ giver

$$u_{a+1} = v_a + v_{a+1} + \underset{a-1,a}{u}$$

$$u_{a+1} y_{a+1} = v_a z_a + v_{a+1} z_{a+1} + \underset{a-1,a}{u}\, y_{a-1}$$

og

$$x_{a+1} = x_a.$$

Naar jeg i det Foregaaende omhyggeligt har paaset, at jeg ikke fjernede mig fra den typiske Eliminationsproces efter mindste Kvadraters Methode, saa var det for ved Bestemmelserne af Middelfejlene at kunne drage Fordel af den vigtige Sætning, som jeg kun kjender fra mundtlige Meddelelser af Prof. Oppermann (Naturforskermødet i Kjøbenhavn 1873), at der gives Systemer af lineære Funktioner af Observationer, som i fuld Almindelighed kunne betragtes som indbyrdes uafhængige Observationer og som saadanne træde istedet for de virkelige Observationer navnlig ved alle Beregninger af Middelfejl paa Funktioner af Elementerne i Udjevningen; samt at netop de ved den typiske Eliminationsproces fremgaaende Ligninger, her (9), i deres venstre Sider repræsentere et saadant System af Funktioner, der kunne gjælde for indbyrdes uafhængige Observationer.

Her ere altsaa i

$$\begin{aligned}
u_0 \ y_0 &= (u_0 + \underset{0,1}{v}) x_0 - \underset{0,1}{v} x_1 \\
u_1 \ y_1 &= (u_1 + \underset{1,2}{v}) x_1 - \underset{1,2}{v} x_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u_a \ y_a &= (u_a + \underset{a,a+1}{v}) \ x_a - \underset{a,a+1}{v} \ x_{a+1} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u_{n-1} y_{n-1} &= (u_{n-1} + \underset{n-1,n}{v}) \ x_{n-1} - \underset{n-1,n}{v} \ x_n \\
u_n \ y_n &= u_n x_n
\end{aligned}$$

Produkterne $u_0 y_0, \ldots u_a y_a, \ldots u_n y_n$ at anse som indbyrdes uafhængigt observerede Værdier saaledes, at Middelfejlens Kvadrat paa $u_a y_a$ er

$$M^2(u_a y_a) = u_a + \underset{a,a+1}{v},$$

følgelig kunne ogsaa selve Værdierne y opfattes som indbyrdes uafhængige Observationer, saaledes at man for Kvadraterne af disses Middelfejl har

$$M^2(y_a) = \frac{u_a + \underset{a,a+1}{v}}{u_a^2} = \frac{1}{u_a - \underset{a,a+1}{u}} \tag{11}$$

kun med den ene Undtagelse, at

$$M^2(y_n) = M^2(x_n) = \frac{1}{u_n} \tag{11 a}$$

Ved nu blot at fremstille x'erne explicit som lineære Funktioner af y'erne, bliver det meget let at fremstille Middelfejlen paa en hvilkensomhelst af Udjevningen fremgaaende Værdi, som forud har været givet som lineær Funktion af x'erne. Men da

$$\left(1 - \frac{\underset{a,a+1}{u}}{u_a}\right) y_a = x_a - \frac{\underset{a,a+1}{u}}{u_a} x_{a+1},$$

ville Koefficienterne i Ligningerne

$$\begin{aligned}
x_0 &= \underset{0,0}{c} y_0 + \underset{0,1}{c} y_1 + \underset{0,2}{c} y_2 + \ldots + \underset{0,n-1}{c} \ y_{n-1} + \underset{0,n}{c} y_n \\
x_1 &= \qquad \underset{1,1}{c} y_1 + \underset{1,2}{c} y_2 + \ldots + \underset{1,n-1}{c} \ y_{n-1} + \underset{1,n}{c} y_n \\
x_2 &= \qquad\qquad \underset{2,2}{c} y_2 + \ldots + \underset{2,n-1}{c} \ y_{n-1} + \underset{2,n}{c} y_n \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x_{a-1} &= \qquad\qquad\qquad \underset{n-1,n-1}{c} \ y_{n-1} + \underset{n-1,n}{c} y_n \\
x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad y_n
\end{aligned} \tag{12}$$

være bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} c_{a,a} &= 1 - \frac{u_{a,a+1}}{u_a} \\ c_{a,b} &= \frac{u_{a,a+1}}{u_a}\,\frac{u_{a+1,a+2}}{u_{a+1}}\cdots\frac{u_{b-1,b}}{u_{b-1}}\left(1 - \frac{u_{b,b+1}}{u_b}\right) = c_{a+1,b}\,\frac{u_{a,a+1}}{u_a} \text{ for } b < a \\ \text{og} \qquad c_{a,b} &= 0 \text{ for } b < a. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

For Middelfejlenes Kvadrater vil man da have

$$M^2(x_a) = \sum_{k=a}^{k=n} \frac{c_{a,k}^2}{u_k - u_{k,k+1}}$$

og i Almindelighed

$$M^2\left(\sum_{a=0}^{a=n} d_a x_a\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{u_k - u_{k,k+1}} \left(\sum_{a=0}^{a=n} d_a c_{a,k}\right)^2,$$

af den første af disse Formler udledes Recursionsformlen (for aftagende Indices)

$$M^2(x_a) = \frac{u_a - u_{a,a+1}}{u_a^2} + \left(\frac{u_{a,a+1}}{u_a}\right)^2 M^2(x_{a+1}) \qquad (14).$$

Som specielt Tilfælde af den almindelige Formel mærke vi os særligt det, der angiver Kvadratet paa Middelfejlen af en lineær Funktion $rx_a + sx_{a+1}$ af to konsekutive x'er:

$$M^2(rx_a + sx_{a+1}) = r^2 \frac{u_a - u_{a,a+1}}{u_a^2} + \left(r\frac{u_{a,a+1}}{u_a} + s\right)^2 M^2(x_{a+1}),$$

som lineær Funktion af lutter y'er med højere Indices kan nemlig x_{a+1} betragtes som uafhængig Observation ved Siden af y_a. Sættes heri $r = 1$, $s = -1$, faas

$$M^2(x_a - x_{a+1}) = \frac{u_a - u_{a,a+1}}{u_a^2} + \left(\frac{u_a - u_{a,a+1}}{u_a}\right)^2 M^2(x_{a+1}) \qquad (15).$$

Ligningerne (14) og (15) tjene paa ret bekvem Maade til Beregning af de Middelfejl, som efter Udjevningen blive tilbage i de Ligninger (2) og (3), som direkte fremgaa af Problemets Grundbetingelser. Ved Hjælp af dem kan man ogsaa transformere den almindeligere Ligning for $M^2(rx_a + sx_{a+1})$ til følgende Form

$$M^2(rx_a + sx_{a+1}) = (r+s)\left(rM^2(x_a) + sM^2(x_{a+1})\right) - rsM^2(x_a - x_{a+1}).$$

Naar man nu erindrer, at ifølge (5) de x'er, for hvilke der ikke haves nogen samtidig virkelig Observation, bestemmes af de x'er, som svare til nærmest foregaaende og paafølgende Observation som en lineær Funktion af disse, om man vil $rx_a + sx_{a+1}$, idet $r + s = 1$, saa vilde det ligge overordentligt nær at bruge denne Ligning for $M^2(rx_a + sx_{a+1})$ til Beregning af Middelusikkerheden for de x'er, der ikke ere bestemte ved samtidige Observationer. Men dette vilde være en væsentlig Fejl, af en ejendommelig Slags, som man maa vogte sig vel for i Undersøgelser af lignende Art som denne. Thi om end $x_b = rx_a + sx_{a+1}$, er det derfor ikke tilladt at sætte $M^2(x_b) = M^2(rx_a + sx_{a+1})$ i saadanne Tilfælde, hvor Ligningen $x_b = rx_a + sx_{a+1}$ selv er fremgaaet som Resultat af Udjevningen og derfor ikke har absolut Gyldighed, men kun gjælder for en Tilnærmelse, hvis Paalidelighed vil kunne maales ved en Middelfejl, hvis Kvadrat vil være $M^2(x_b) - M^2(rx_a + sx_{a+1})$. $M^2(x_b)$ maa altsaa bestemmes direkte ved det samme Middel, Indskydelse af en fiktiv Observation, som har givet x_b. Konsekventserne af at man indskyder en saadan, forklares maaske bedst ved at det oprindelige Schema over v'erne, u'erne, y'erne og x'erne nemlig

$$\begin{array}{cc|cc|c|c}
v_a & & u_a & & y_a & x_a \\
& \underset{a,a+1}{v} & & \underset{a,a+1}{u} & & \\
v_{a+1} & & u_{a+1} & & y_{a+1} & x_{a+1}
\end{array}$$

forandres til følgende

$$\begin{array}{cc|cc|c|c}
v_a & & u_a & & y_a & x_a \\
& \underset{a,b}{\boldsymbol{v}} & & \underset{a,b}{\boldsymbol{u}} & & \\
\boldsymbol{v}_b & & \boldsymbol{u}_b & & \boldsymbol{y}_b & \boldsymbol{x}_b \\
& \underset{b,a+1}{\boldsymbol{v}} & & \underset{b,a+1}{\boldsymbol{u}} & & \\
v_{a+1} & & u_{a+1} & & y_{a+1} & x_{a+1}
\end{array}$$

i Henhold til følgende Relationer

$$v_b = 0$$

$$\frac{1}{\underset{a,b}{v}} + \frac{1}{\underset{b,a+1}{v}} = \frac{1}{\underset{a,a+1}{v}}$$

$$u_b = \underset{a,b}{u} = \frac{u_a \underset{a,b}{v}}{u_a + \underset{a,b}{v}} = \frac{\underset{b,a+1}{v}\ \underset{a,a+1}{u}}{\underset{b,a+1}{v} - \underset{a,a+1}{u}}$$

idet tillige

$$\underset{b,a+1}{u} = \underset{a,a+1}{u}$$

$$y_b = y_a$$

$$x_b = \frac{\underset{a,b}{v} x_a + \underset{b,a+1}{v} x_{a+1}}{\underset{a,b}{v} + \underset{b,a+1}{v}} = px_a + (1-p)x_{a+1}$$

hvor altsaa

$$p = \frac{\underset{a,b}{v}}{\underset{a,b}{v} + \underset{b,a+1}{v}} = \frac{u_a(u_b - \underset{a,a+1}{u})}{u_b(u_a - \underset{a,a+1}{u})}$$

medens

$$1 - p = \frac{\underset{b,a+1}{v}}{\underset{a,b}{v} + \underset{b,a+1}{v}} = \frac{\underset{a,a+1}{u}(u_a - u_b)}{u_b(u_a - \underset{a,a+1}{u})}.$$

Med Hensyn til y'erne som indbyrdes uafhængigt observerede er altsaa hele Forandringen den, at det oprindelige y_a, som havde Vægten $u_a - \underset{a,a+1}{u}$, er erstattet med to, nemlig

y_a med Vægten $u_a - u_b$ og $y_b = y_a$ med Vægten $u_b - \underset{a,a+1}{u}$, saaledes at selve Værdierne ere identiske og Vægtenes Sum lig med den oprindelige Vægt. Men, hvor ringe denne Forandring end synes at være, har den dog reel Betydning, men kun med Hensyn til Bestemmelsen af $M^2(x_b)$. Efter (14) har man nemlig nu direkte

$$M^2(x_b) = \frac{u_b - \underset{a,a+1}{u}}{u_b^2} + \left(\frac{\underset{a,a+1}{u}}{u_b}\right)^2 M^2({}_{a+1});$$

ved dobbelt Anvendelse af (14) har man derhos

$$M^2(x_a) = \frac{u_a - \underset{a,b}{u}}{u_a^2} + \left(\frac{\underset{a,b}{u}}{u_a}\right)^2 \left[\frac{u_b - \underset{a,a+1}{u}}{u_b^2} + \left(\frac{\underset{a,a+1}{u}}{u_b}\right)^2 M^2(x_{a+1})\right],$$

som, da $u_b = \underset{a,b}{u}$, giver

$$M^2(x_a) = \frac{u_a - \underset{a,a+1}{u}}{u_a^2} + \left(\frac{\underset{a,a+1}{u}}{u_a}\right)^2 M^2(x_{a+1})$$

altsaa uforandret efter (14). Man har altsaa

$$pM^2(x_a) + (1-p)M^2(x_{a+1}) = \frac{u_b - \underset{a,a+1}{u}}{u_a u_b} + \frac{\underset{a,a+1}{u}\,(u_a + \underset{a,a+1}{u} - u_b)}{u_a u_b} M^2(x_{a+1})$$

og

$$M^2(x_b) = pM^2(x_a) + (1-p)M^2(x_{a+1}) + \frac{(u_a - u_b)(u_b - \underset{a,a+1}{u})}{u_a u_b^2}\left(1 - \underset{a,a+1}{u}\, M^2(x_{a+1})\right)$$

$$= pM^2(x_a) + (1-p)M^2(x_{a+1}) + p(1-p)\frac{(u_a - \underset{a,a+1}{u})^2}{u_a^2}\left(\frac{1}{\underset{a,a+1}{u}} - M^2(x_{a+1})\right)$$

altsaa ifølge (15)

$$M^2(x_b) = pM^2(x_a) + (1-p)M^2(x_{a+1}) + p(1-p)\left(\frac{u_a - \underset{a,a+1}{u}}{u_a\,\underset{a,a+1}{u}} - M^2(x_a - x_{a+1})\right)$$

$$= pM^2(x_a) + (1-p)M^2(x_{a+1}) + p(1-p)\left(\frac{1}{\underset{a,a+1}{v}} - M^2(x_a - x_{a+1})\right) \qquad (16);$$

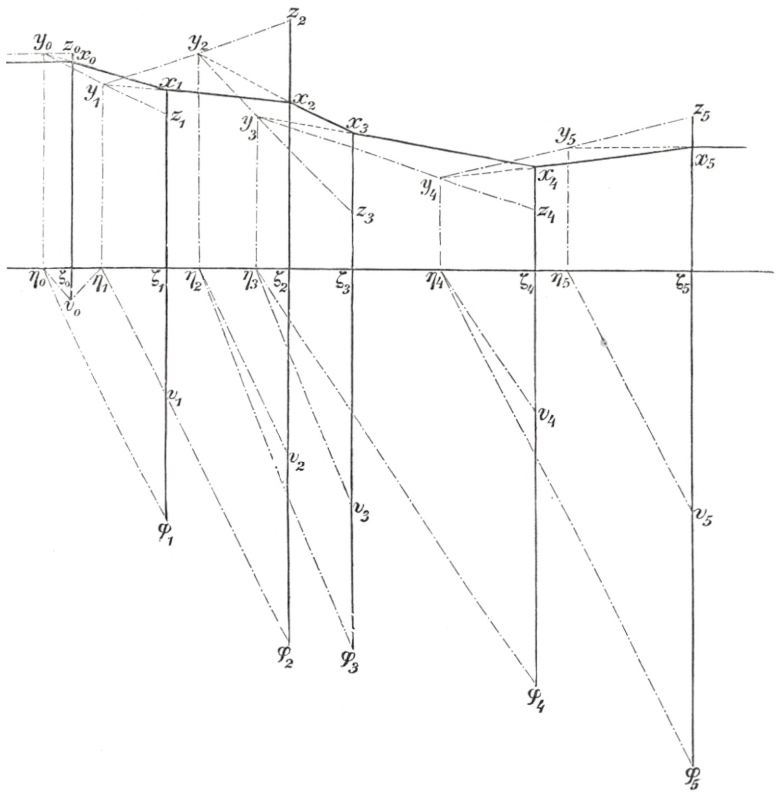
følgelig er Resultatet dette, at

$$M^2(x_b) - M^2(px_a + (1-p)x_{a+1}) = \frac{p(1-p)}{\underset{a,a+1}{v}}.$$

Sættes i disse Formler $\underset{a,a+1}{v} = 0$, saa at Opgaven bliver at bestemme x'er og deres Middelfejl udenfor det Tidsrum, Observationerne omfatte, eller i et Mellemrum, hvor Instrumentet kan have lidt saadan Forandring, at Observationsrækken maa betragtes som fuldstændigt afbrudt, da medfører $\underset{a,a+1}{v} = 0$ ifølge (7) at $\underset{a,a+1}{u} = 0$. Forsaavidt da ikke tillige $\underset{a,b}{v} = 0$, vil $p = 1$

$x_b = x_a$ og $M^2(x_b) = \dfrac{1}{u_b} = \dfrac{1}{u_a} + \dfrac{1}{\underset{a,b}{v}}$, som ogsaa i sig selv er naturligt.

Konstruktion af den foregaaende Udjevning.



1) Paa en Abscisseaxe afsættes Punkterne ζ_0, $\zeta_1 \ldots \zeta_n$ ordnede efter Indices og saaledes, at overalt Afstanden $\zeta_{a+1} - \zeta_a = 1 : v_{a,a+1}$, saa at de altsaa repræsentere Observationstiderne i det Tilfælde, at Instrumentets Middelforskydelse har været ligestor i ligestore Tider. 2) Lodret over ζ_a afsættes Punkter z_a, efter at man først ved Addition af en fælleds Konstant har gjort alle Observationer z_a positive, nemlig saaledes at Ordinaten $z_a - \zeta_a =$ Observation z_a. 3) Lodret under ζ_a afsættes Punkter υ_a saaledes, at Ordinaterne $\zeta_a - \upsilon_a = 1 : v_a$, 4) Lodret under $\upsilon_1 \ldots \upsilon_n$ afsættes paa samme Ordinater en Række Punkter $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ og paa Abscisseaxen en tilsvarende Række Punkter η_0, $\eta_1 \ldots, \eta_n$, alle foran de ens indicerede ζ'er. Konstruktionen udføres successivt efter voxende Indices og begynder med η_0 bestemt ved $\zeta_0 - \eta_0 = \zeta_0 - \upsilon_0$, derefter overalt saaledes, at $\upsilon_a - \varphi_a = \zeta_a - \eta_{a-1}$ og $(\eta_a \upsilon_a) \neq (\eta_{a-1} \varphi_a)$. 5) Punkterne $y_0 y_1 \ldots y_n$ skulle nu afsættes lodret over de ens indicerede η'er, beliggende paa et System af rette Linier, hvert y_a paa den rette Linie mellem y_{a-1} og z_a og specielt y_0 i ligestor Ordinat med z_0, $y_0 - \eta_0 = z_0 - \zeta_0$. 6) Ved y'erne bestemmes saa Punkterne $x_0 \ldots x_n$ som angive de udjevnede Værdier, saaledes, at hvert x_a ligger paa samme Ordinat som det tilsvarende z_a (og ζ_a), $x_n - \zeta_n = y_n - \eta_n$ og forøvrigt x_a paa den rette Linie gjennem x_{a+1} og y_a, hvoraf saaledes Stykket mellem x_a og x_{a+1} repræsenterer Instrumentets rimeligste Bevægelse i Tiden fra t_a til t_{a+1}.

Bestemmelse af Enhederne for de to Slags Vægte.

Naar en hvilkensomhelst Udjevning er udført, rejser sig bestandigt det Spørgsmaal, om de Fejl, den lader blive tilbage i Observationerne, tilfredsstille de Forudsætninger om

Fejlenes Natur, hvorpaa Udjevningen hviler; kan eller vil man ikke prøve dette, tør Resultatet kun betragtes som hypothetisk. Blandt andet bør det Spørgsmaal søges besvaret, om de Forudsætninger angaaende Middelfejl eller Vægte, hvorpaa en Udjevning efter mindste Kvadraters Methode er baseret, vise sig overensstemmende med, hvad der a posteriori kan udledes af Tabellen over de Fejl, der blive tilbage. Hyppigt kommer dette Spørgsmaal frem i den særlige Form, at man a priori ikke kjender de enkelte Betingelsesligningers Vægte, men nok nogle Systemer af Forhold mellem dem, som vilde være tilstrækkelige til Vægtenes Bestemmelse, dersom man desuden kjendte et mindre Antal af Vægtenheder, én for hver System, man maa da regne disse Vægtenheder med blandt Opgavens Ubekjendte, og er efter Forholdenes indviklede Natur henvist til den indirekte Methode, at begynde med rent hypothetiske Vægtenheder, og efter at man med dem har gjennemregnet Udjevningen, af Restfejlene beregne nye og i Almindelighed forbedrede Værdier for Vægtenhederne, hvormed saa Regningen gjøres om, indtil de aposterioriske Vægtenheder i sidste Udjevning stemme tilstrækkeligt nøjagtigt overens med de aprioriske for denne Udjevning. Kun i et Tilfælde slipper man helt for slige Gjentagelser, nemlig naar kun én for alle Observationerne fælles Vægtenhed har været ubekjendt, i dette Tilfælde faar Vægtenhedens absolute Værdi ingen Indflydelse paa Udjævningens Resultat og bestemmes selv ved Formlen

$$\frac{n-m}{\Sigma(f^2)},$$

hvor f er Restfejlen i den enkelte Ligning, n disses Antal og m Elementernes Antal, eller maaske ved

$$\frac{n-m-1}{\Sigma(f^2)},$$

nemlig forsaavidt man bør regne den ubekjendte Vægtenhed i et og alt med blandt Opgavens Ubekjendte, hvad der dog maa anses for noget problematisk. Exempler paa Tilfælde med flere ubekjendte Vægtenheder ere meget hyppige i Astronomien, man behøver blot at nævne Rektascensionernes og Deklinationernes Vægte ved en Banebestemmelse. Exempler paa en korrekt Behandling af Tilfælde med flere ubekjendte Vægtenheder ere — ikke hyppige.

I de særlige Opgaver, vi her behandle, vil man som oftest være nødt til at gjentage Udjevningen mindst en Gang med forbedrede Vægte. Thi medens man hyppigt nok vil kjende Forholdene mellem

$$v_0,\ v_0,\ \dots\ v_n$$

for sig og imellem

$$v_{0,1},\ v_{1,2},\ \dots\ v_{n-1,n}$$

for sig, vil man ingenlunde altid kjende Enheden for Vægtene v_a tilstrækkelig nøje, og som oftest være endnu ugunstigere stillet overfor Enheden for $v_{a,a+1}$. Og navnlig vil man paa

Grund af et Forhold, der strax skal omtales ikke kunne undgaa Gjentagelse af Udjevningsprocessen, dog synes der at være Grund til at antage, at Konvergensen i Bestemmelsen af Vægtenhederne som oftest vil være saa stor, at Arbejdet ikke let vil blive uoverkommeligt.

Naar en Udjevning er gjennemregnet paa Grundlag af en hypothetisk Enhed E_v for Vægtene v_0, v_1, . . . v_n og en anden, E_w for Gruppen $\underset{0,1}{v}$, $\underset{1,2}{v}$, . . . $\underset{n-1,n}{v}$, er det klart nok, at man maa søge E_v bestemt ved Differenserne $z_a - x_a$, E_w ved Differenserne $x_a - x_{a+1}$. Vi have $n+1$ Differenser af første Slags, n af andet, og $n+1$ Elementer x_0, x_1 . . . x_n ere bestemte ved samtlige $2n+1$ Ligninger. Til Elementernes Antal bør maaske endnu lægges 2 (d. e. for E_v og E_w), men ved de store Værdier, som n altid vil have i Undersøgelser af denne Art, bliver dette Spørgsmaal af ganske underordnet Betydning, og jeg skal derfor i det Følgende helt se bort fra denne Mulighed og holde mig til $n+1$ som Elementernes Antal. Man kan da for de søgte Vægtenheder skrive

$$E_v = \frac{n+1-\xi}{\Sigma v_a (z_a - x_a)^2}, \quad E_w = \frac{n-\eta}{\Sigma \underset{a,a+1}{v} (x_a - x_{a+1})^2},$$

hvor det dog om ξ og η endnu kun vides, at deres Sum er Elementernes Antal,

$$\xi + \eta = n+1,$$

det gjælder om at bestemme, hvor stor en Del af dette Antal, der falder paa hver af de to Grupper. I andre Opgaver, hvor Ligningerne ere meget talrige i Sammenligning med Elementerne har dette ikke stort at sige, og man vil da ofte kunne nøjes med at fordele Elementernes Antal ligeligt, men her er Ligningernes Antal aldrig fuldt dobbelt saa stort som Elementernes, og et Exempel vil derhos let vise, at Fordelingen undertiden bør være meget uligelig. Tænke vi os nemlig, at en Instrumentkonstant i Grunden kun var observeret til to væsentligt forskjellige Tider, men hver Gang med talrige Gjentagelser den ene umiddelbart efter den anden og uden særlig Fare for reel Forandring i Instrumentet, da vil det være let nok at se, at η vil nærme sig til Grændsen $n-1$, medens ξ nærmer sig til 2. For ogsaa i de mere indviklede Tilfælde og almindeligt at kunne bestemme ξ og η, vil det være nødvendigt i Detail at undersøge for hver enkelt af Betingelsesligningerne, hvormeget den bidrager til det Tal ξ eller η, der skal fradrages Ligningernes Antal, eller hvormeget man skal addere til henholdsvis $v_a(z_a - x_a)^2$ eller $\underset{a,a+1}{v}(x_a - x_{a+1})^2$ for at have Ret til at forudsætte, at den udkommende Sum gjennemsnitsvis skal være lig 1 for hver Ligning. I sidste Form af Spørgsmaalet er Besvarelsen let; thi ogsaa efter Udjevningerne ere x_a og $x_a - x_{a+1}$ behæftede med Usikkerhed, der henholdsvis maales med Middelfejlene $M(x_a)$ og $M(x_a - x_{a+1})$, se (14) og (15). Da nu netop denne Usikkerhed gjennem Fordringen om, at Summen af Afvigelsernes Kvadrater Gange Vægten ved Udjevningen skal drives ned til sit Minimum, i Almindelighed er Skyld i, at denne Kvadratsum bliver mindre, end hvis Iagttagelserne vare blevne sammenlignede med de absolut sande Værdier, er det idetmindste højst sandsynligt, at man træffer det Rette ved til hver Afvigelses Kvadrat at lægge Kvadratet paa den Middelfejl, som bliver tilbage efter Udjevningen. Det er ved at gaa frem paa lignende Maade, at man summarisk beviser den almindelige Regel, at Iagttagelsernes Antal bør formindskes med Elementernes Antal i Formlen for Vægtenes aposterioriske Bestemmelse. I vort Tilfælde ses det uden stor Vanskelighed af (12) og (13), at

$$\Sigma v_a M^2(x_a) + \sum_{a,a+1} v \; M^2(x_a - x_{n+1}) = n + 1.$$

For de to Grupper af Ligninger finde vi paa denne Maade

$$\xi = \Sigma v_a M^2(x_a)$$
$$\eta = \sum_{a,a+1} v \; M^2(x_a - x_{a+1}),$$

og idet vi bemærke, at disse Værdier for ξ og η ere uafhængige af enhver fælles Multiplikator til E_v og E_w, og sædvanligvis kun lidet foranderlige ved en Forandring af $E_w : E_v$, faa vi til Bestemmelse af Vægtenhederne

$$\left.\begin{aligned} E_v &= \frac{n + 1 - \Sigma v_a M^2(x_a)}{\Sigma v_a (z_a - x_a)^2} \\ E_w &= \frac{n - \sum_{a,a+1} v \; M^2(x_a - x_{a+1})}{\sum_{a,a+1} v \; (x_a - x_{a+1})^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Kjendetegnet paa, at vi have regnet den sidste Gjentagelse af Udjevningen derunder højre Side i (17) med rigtige Vægte, bliver altsaa $E_v = 1$ og $E_w = 1$.

Det bør her bemærkes, at medens $v_a M^2(x_a)$ ikke synes at kunne simplificeres med nogen Fordel ved (6) og (14), har man ifølge (7) og (15)

$$\underset{a,a+1}{v} M^2(x_a - x_{a+1}) = 1 - \underset{a,a+1}{(u_a - u)} \left(\frac{1}{u_a} - M^2(x_{a+1})\right) - \underset{a,a+1}{(u_a - u)^2} \frac{M^2(x_{a+1})}{u_a},$$

som lader os se at, naar $\underset{a,a+1}{v}$ er forholdsvis stor, og som Følge deraf $\underset{a,a+1}{u_a - u}$ lille, vil $\underset{a,a+1}{v} M^2(x_a - x_{a+1})$ i Reglen kun være lidet mindre end 1, saa at Differenserne $x_a - x_{a+1}$ i de Tilfælde, hvor Observationstiderne t_a og t_{a+1} kun ere lidet forskjellige fra hinanden, saagodt som slet ikke ville kunne bidrage til Bestemmelse af E_w. Deraf følger, at de udjevnede Værdier x_a og x_{a+1} i slige Tilfælde ikke let kunne komme til at vise synderlig Forskjel, og vi uddrage deraf den almindelige Regel, at man forud for en Udjevning af denne Art kan og bør sammendrage alle saadanne Grupper af Observationer til simple Middeltal, som kun ere adskilte med ringe Mellemtider; med lidt Forsigtighed vil man ikke let udsætte sig for at gaa for vidt i saadan Sammendragning, der jo øjensynligt medfører stor Besparelse af Arbejde. Naturligvis bør man ikke forsømme at benytte de Observationer, man forener i Middeltal ved Bestemmelsen af Vægtenheden E_v. Hyppigt vil man paa denne Maade forud for den egentlige Udjevning kunne vinde saa god en Bestemmelse af E_v, at den endelige Udjevning kun kan modificere den ubetydeligt. Vanskeligere er det forud at sikkre sig en tilstrækkeligt tilnærmet Bestemmelse af E_w. I denne Henseende skal jeg anbefale, at gjøre en Overslagsregning efter det Princip, at man først gaar til den yderste tilladelige Grændse med at sammentrække konsekutive Observationer til Middeltal, at man dernæst betragter disse Middeltal som udjevnede Værdier for x, medens man helt ser bort fra de spredte Observationer, som ikke kunne bruges til Beregning af Middeltal, og paa denne Maade skaffer sig en Række Værdier,

$$x_A,\ x_B,\ x_C,\ x_D,\ x_E.$$

Ved Siden deraf maa man sammentrække de foreløbigt med en vilkaarlig Enhed fastsatte Vægte $\underset{a,a+1}{v}$, saaledes at

$$\frac{1}{\underset{A,B}{v}} = \sum_A^B \frac{1}{\underset{a,a+1}{v}}, \text{ o. s. v.}$$

Beregner man da Vægtenheden E_w efter Formlen

$$E_w = \frac{N}{\underset{A,B}{\Sigma} v(x_A - x_B)^2},$$

idet $N+1$ er Antallet af de benyttede Middeltal x_A osv., da vil en saadan Bestemmelse vel som oftest vise sig lidt for stor, men dog kunne bruges som en første Tilnærmelse.

Men selv, hvor man gjennem en Udjevning har faaet Bekræftelse paa, at de anvendte Vægte ere rigtige, under Forudsætning af at Fejllovene ere exponentielle, er der endnu Brug for endel mere Kritik end der sædvanligt anvendes. «Skjæve» Fejllove og Fejllove med flere Maxima forekomme vel kun sjeldent, men kræve, hvor de vise sig, en forandret Behandlingsmaade. For systematiske Fejl bliver man ikke let helt fri.

Udjevning efter lineære Funktioner af ubekjendte Elementer.

Naar man har tilendebragt en Udjevning efter de her fremsatte Regler for en Række Iagttagelser med Komplikation af to forskjelligt virkende Slags tilfældige Fejlkilder, vil man selvfølgeligt ikke være fritaget for at prøve de to fundne Fejltabeller yderligere. Det kan jo være, at Resultaterne vise Mangeler, som antyde, at Komplikationen har været af en anden Art, end den forholdsvis simple Slags, som her er behandlet. Det kan ogsaa være, at man, efter at have sondret imellem de to Slags Fejl, bliver sat i Stand til at erkjende Spor af egentlige systematiske Fejl i den ene eller anden af de fundne Fejltabeller, Fejl, som man ikke kunde paavise, saalænge de skjultes af Komplikationen mellem de egentlige Iagttagelsesfejl og Instrumentets Forrykkelser, men som, efter at denne er hævet, vise sig saa tydeligt, at der kan være Haab om at kunne fjerne dem ved at beregne Korrektioner paa Grundlag af en eller anden Biomstændighed ved Observationerne. Desuden have vi jo hidtil kun betragtet det Tilfælde, hvor de med komplicerede Fejl behæftede Observationer angaa et Fænomen, som i sig selv kunde antages at være konstant. Det bør da endnu i

Korthed vises, hvorledes man skal forholde sig, naar det observerede Fænomen varierer efter Love, som kunne antages at være lineære Funktioner med et Antal ubekjendte Koefficienter, samtidig med at Fejlene ere af den her behandlede komplicerede Slags. Det vil være tilstrækkeligt her at behandle det Tilfælde, at Loven for det observerede Fænomen er $\zeta_a = pf_a + qg_a$, hvor ζ_a, den sande Værdi i den til Tiden t_a anstillede Observation, er afhængig af to ubekjendte Elementer p og q, medens f_a og g_a ere bekjendte, af t_a afhængige Tal. Observationerne antages at lide af to Slags Fejl, dels saadanne x_a (svarende til t_a), som paa Grund af Instrumentets foranderlige Tilstand eller lignende, vilde være uundgaaeligt de samme for enhver til Tiden t_a med det paagjældende Instrument anstillet Observation, men som paa tilfældig Maade forandre sig fra det ene Øjeblik til det følgende, saa at man har Ligninger

$$x_a - x_{a+1} = 0 \tag{2}$$

med tilhørende Vægte $\underset{a,a+1}{v}$ ligesom ovenfor, dels saadanne Fejl, som paa tilfældig og indbyrdes uafhængig Maade paavirke de enkelte Observationer saaledes, at der ved begges Samvirken i Stedet for ζ_a fremkommer z_a som de virkeligt observerede Værdier, altsaa Ligninger

$$z_a = x_a + pf_a + qg_a \tag{18}$$

med Vægt v_a, svarende til Ligningerne (3) i det simplere Problem. Med $n+1$ Observationer (Indices fra 0 til n) haves altsaa $2n+1$ Ligninger til Bestemmelse af $n+3$ Ubekjendte x_0, $x_1 \ldots x_n$, p og q. Efter mindste Kvadraters Methode haves da

$$\left.\begin{array}{l}
v_0 z_0 = (v_0 + \underset{0,1}{v}) x_0 - \underset{0,1}{v} x_1 + \qquad\qquad + v_0 f_0 p + v_0 g_0 q \\
v_1 z_1 = -\underset{0,1}{v} x_0 + (\underset{0,1}{v} + v_1 + \underset{1,2}{v}) x_1 - \underset{1,2}{v} x_2 + \qquad + v_1 f_1 p + v_1 g_1 q \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_a z_a = -\underset{a-1,a}{v} x_{a-1} + (\underset{a-1,a}{v} + v_a + \underset{a,a+1}{v}) x_a - \underset{a,a+1}{v} x_{a+1} + \ldots + v_a f_a p + v_a g_a q \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n z_n = -\underset{n-1,n}{v} x_{n-1} + (\underset{n-1,n}{v} + v_n) x_n + v_n f_n p + v_n g_n q \\
[vfz] = v_0 f_0 x_0 + v_1 f_1 x_1 + \ldots . + v_a f_a x_a + \ldots . + v_n f_n x_n + [vf^2] p + [vfg] q \\
[vgz] = v_0 g_0 x_0 + v_1 g_1 x_1 + \ldots . + v_a g_a x_0 + \ldots . + v_n g_n x_n + [vfg] p + [vg^2] q
\end{array}\right\} \tag{19}$$

hvor almindeligt $[vrs] = v_0 r_0 s_0 + v_1 r_1 s_1 + \ldots . + v_n r_n s_n$. Ved Eliminationen mellem disse Ligninger bruge vi uforandret u_a og $\underset{a,a+1}{u}$ bestemte ved (6) og (7), altsaa spiller Kjædebrøken (10) ogsaa her en Hovedrolle. Endvidere bruge vi de samme Hjælpeværdier, som vi ovenfor have betegnet med y, men som vi her ville give en anden Betegnelse nemlig $\{z\}$, altsaa $\{z_0\} = z_0$ og iøvrigt

$$u_{a+1}\{z_{a+1}\} = v_{a+1} z_{a+1} + \frac{u_a \underset{a,a+1}{v}}{u_a + \underset{a,a+1}{v}} \{z_a\},$$

og desuden to Sæt paa analog Maade af f og g beregnede Værdier $\{f\}$ og $\{g\}$ bestemte ved $\{f_0\} = f_0$, $\{g_0\} = g_0$ og iøvrigt

$$u_{a+1}\{f_{a+1}\} = v_{a+1}f_{a+1} + \frac{u_a \underset{a,a+1}{v}}{u_a + \underset{a,a+1}{v}}\{f_a\}$$

$$u_{a+1}\{g_{a+1}\} = v_{a+1}g_{a+1} + \frac{u_a \underset{a,a+1}{v}}{u_a + \underset{a,a+1}{v}}\{g_a\},$$

og derhos nogle mere sammensatte skjøndt ogsaa analoge Hjælpeværdier

$$\{fz\}, \quad \{gz\}, \quad \{f^2\}, \quad \{fg\} \text{ og } \{g^2\}$$

alle fem beregnede efter samme almindelige Rekursionsformel

$$u_{a+1}\{r_{a+1}s_{a+1}\} = v_{a+1} \cdot r_{a+1} \cdot s_{a+1} + u_a\{r_a s_a\} - (u_a - \underset{a,a+1}{u})\{r_a\}\{s_a\}$$

med Udgangsværdi $\{r_0 s_0\} = r_0 s_0$.

Med disse Hjælpeværdier blive nu de $n+1$ første Endeligninger

$$\left.\begin{array}{rcl}
v_0 z_0 & = & (v_0 + \underset{0,1}{v})\,x_0 - \underset{0,1}{v}\,x_1 + v_0 f_0 p + v_0 g_0 q \\
u_1\{z_1\} & = & (u_0 + \underset{1,2}{v})\,x_1 - \underset{1,2}{v}\,x_2 + v_1\{f_1\}p + u_1\{g_1\}q \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_a\{z_a\} & = & (u_a + \underset{a,a+1}{v})\,x_a - \underset{a,a+1}{v}\,x_{a+1} + u_a\{f_a\}p + u_a\{g_a\}q \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_n\{z_n\} & = & u_n z_n + u_n\{f_n\}p + u_n\{g_n\}q
\end{array}\right\} \quad (20),$$

og derved føres man til to Ligninger til Bestemmelse af p og q,

$$\left.\begin{array}{l}
u_n(\{f_n z_n\} - \{f_n\}\{z_n\}) = u_n(\{f_n^2\} - \{f_n\}^2)\,p + u_n(\{f_n g_n\} - \{f_n\}\{g_n\})\,q \\
u_n(\{g_n z_n\} - \{g_n\}\{z_n\}) = u_n(\{f_n g_n\} - \{f_n\}\{g_n\})\,p + u_n(\{g_n^2\} - \{g_n\}^2)\,q
\end{array}\right\} \quad (21),$$

som ere analoge med de Ligninger, man paa sædvanlig Maade vilde have fundet, hvis $z_a = f_a p + g_a q$ kun havde havt simple tilfældige Fejl, altsaa med

$$[vfz] = [vf^2]p + [vfg]q$$
$$[vgz] = [vfg]p + [vg^2]q.$$

Man kan her give Recursionsformlerne for Hjælpeværdierne simplere Former. For $\{r_{a+1}\}$ kan man overensstemmende med (8) sætte

$$\left.\begin{array}{l}
u_{a+1}(\{r_{a+1}\} - \{r_a\}) = v_{a+1}(r_{a+1} - \{r_a\}) \\
\text{eller} \\
u_{a+1}(\{r_{a+1}\} - r_{a+1}) = \underset{a,a+1}{u}(\{r_a\} - r_{a+1})
\end{array}\right\} \quad (22)$$

og for $\{r_{a+1}s_{a+1}\}$ haves

$$u_{a+1}(\{r_{a+1}s_{a+1}\} - \{r_a\}\{s_a\}) = v_{a+1}(r_{a+1}s_{a+1} - \{r_a\}\{s_a\}) + u_a(\{r_a s_a\} - \{r_a\}\{s_a\}$$

eller

$$u_{a+1}(\{r_{a+1}s_{a+1}\} - r_{a+1}s_{a+1}) + \underset{a,a+1}{u}(r_{a+1}s_{a+1} - \{r_a\}\{s_a\}) + u_a(\{r_a\}\{s_a\} - \{r_a s_a\}) = 0,$$

og heraf kan man ved at indføre endnu en Række Hjælpeværdier tilvejebringe Formler, som egne sig til praktisk Regning), nemlig saaledes at $\underset{a}{(RS)}$ bestemmes ved

$$\underset{a,a+1}{u}\left(\underset{a}{(RS)} - \{r_a\}\{s_a\}\right) = u_a\left(\{r_s s_a\} - \{r_a\}\{s_a\}\right) \tag{23}$$

medens ved Hjælp deraf $\{r_{a+1}s_{a+1}\}$ beregnes ved

$$u_{a+1}\left(\{r_{a+1}s_{a+1}\} - r_{a+1}s_{a+1}\right) = \underset{a,a+1}{u}\left(\underset{a}{(RS)} - r_{a+1}s_{a+1}\right) \tag{24}.$$

Endnu kan bemærkes Formlen

$$u^2{}_{a+1}\left(\{r_{a+1}s_{a+1}\} - \{r_{a+1}\}\{s_{a+1}\}\right) = u_a u_{a+1}\left(\{r_a s_a\} - \{r_a\}\{s_a\}\right) + v_{a+1}\underset{a,a+1}{u}\left(\{r_a\} - r_{a+1}\right)\left(\{s_a\} - s_{a+1}\right),$$

som han have Betydning som Kontrol for (23) og (24) samt (22).

Efter at have opstillet Grundformlerne for dette Problem, skal jeg derom kun bemærke, at naar f_a er konstant $= f$ for alle Indices, vil ogsaa $\{f_a\} = f$ og $\{f_a r_a\} = f\{r_a\}$, hvoraf følger, at det konstante Led, fp, uopløselig forbinder sig med x'erne saa at $x_a + fp$ træder i Stedet for x_a i Ligningerne (20), idet det næstsidste Led bortfalder, medens af Ligningerne (21) den første bliver identisk, den anden simplere. Forsaavidt altsaa Ligningen for det observerede Fænomen indeholder et konstant Led, vil dette ikke kunne adskilles fra Fejlene x. For Ligninger af Formen $\zeta_a = o + pf_a + qg_a$ gjælder altsaa den givne Løsning uden nogen Forandring.

Regneexempel.

Det vil vist ikke være overflødigt nærmere at oplyse det simpleste Tilfælde af hele denne Theori med et Regneexempel. Dertil vælger jeg en Række Observationer, som under den i Sommer udførte Længdebestemmelse mellem Lund og Kjøbenhavn ere tagne til Bestemmelse af Indexfejlen for Mikrometret paa Kjøbenhavner Meridiankredsen. Jeg har derved tillagt enhver enkelt Observation af Koincidensen mellem den bevægelige Traad og den faste Midttraad samme Vægt, og derhos forudsætter jeg, at Koincidenspunktet mellem de to Traade, der aabenbart ikke har været fuldkomment uforanderligt, har varieret paa ren tilfældig Maade fra det ene Øjeblik til det andet, samt at Koincidenspunktets Middelforandring har været den samme i hvert Tidselement, altsaa $\underset{a,a+1}{v}$ omvendt proportional med $t_{a+1} - t_a$, uanset om Mikrometret har været i Brug i Mellemtiden eller ikke, denne sidste Forudsætning vil man dog se, at jeg har søgt at prøve ved en særlig Undersøgelse. Selvfølgeligt er jeg gaaet ud fra, at begge Fejllovene vare exponentielle og frie for systematiske Fejl, det vil vise sig tvivlsomt, om dette sidste har været ganske berettiget.

Til Enhed for Observationerne benytter jeg $\frac{1}{100}$ Skrueomgang $= 0''\!\cdot\!2633$ og bortkaster for at spare Plads de for alle Observationerne fælleds Tiere, Hundreder osv. af denne Enhed. I Overensstemmelse hermed skulle Vægtenhederne E_v og E_w bestemmes saaledes, at $E_v = 1$ vilde betyde, at Middelfejlen paa enkelt Koincidens var $0''\!\cdot\!2633$, medens $E_w = 1$

vilde kræve, at Instrumentets Middelbevægelse i én Dag var 0″·2633. Af de til Middeltal sammendragne umiddelbare Gjentagelser bestemtes E_v foreløbigt, idet 36 indbyrdes uafhængige Ligninger, hver med Vægt som enkelt Koincidens, viste en Kvadratsum = 2·902 af Afvigelserne, hvorefter $E_v = 12·4$.

Ved en foreløbig Udjevning, der hvilede paa Forudsætninger, som tildels viste sig urigtige, havde jeg fundet $E_v = 12·5$ og $E_w = 24·8$. Med disse Værdier beregnedes de Værdier for v_a og $v_{a,a+1}$, som tilligemed z_a udgjøre det givne i den følgende Beregning. For at opnaa en lettere Regning, har jeg dog i Virkeligheden overalt regnet med de dobbelte Vægte, men for bedre Overskueligheds Skyld anfører jeg Regningens Resultater, som om dette ikke var gjort. En Nøjagtighed af 2 Ciffre var tilstrækkelig.

Index a	1879 Juli	v_a	$\frac{1}{v_{a,a+1}}$	u_a	$u_{a,a+1}$	$M^2(x_a)$	$M^2(x_a-x_{a+1})$	$v_a M^2(x_a)$	$v_{a,a+1} M^2(x_a-x_{a+1})$	z_a	y_a	x_a	z_a-x_a	x_a-x_{a+1}	$v_a(z_a-x_a)^2$	$v_{a,a+1}(x_a-x_{a+1})^2$
0	2·61	25·0		25·0		0·0180		0·45		4·45	4·45	4·25	+0·20		1·01	
			0·0100		20·0		0·0086		0·86					+0.05		0·26
1	2·85	25·0		45·0		·0156		·39		4·25	4·34	4·20	+ ·05		·07	
			·0336		18·0		·0182		·54					+ ·21		1·30
2	3·65	25·0		43·0		·0132		·33		3·95	4·11	3·99	— ·04		·04	
			·0088		31·5		·0070		·80					+ ·05		·25
3	3·86	25·0		56·5		·0126		·32		3·95	4·04	3·94	+ ·01		·00	
			·0316		20·5		·0156		·49					+ ·17		·92
4	4·61	37.5		58·0		·0108		·41		3·43	3·65	3·77	— ·34		4·36	
			·0016		53·0		·0014		(·88)					— ·01		·11
5	4·65	25·0		78·0		·0114		·29		4·05	3·78	3·78	+ ·27		1·77	
			·0832		10·5		·0214		·26					— ·05		·04
6	6·63	25·0		35·5		·0136		·34		3·85	3·83	3·84	+ ·01		·00	
			·0004		35·0		·0004		(1·00)					·00		·00
7	6·64	25·0		60·0		·0134		·33		3·85	3·84	3·84	+ ·01		·00	
			·0420		17·0		·0214		·51					·00		·00
8	7·64	25·0		42·0		·0182		·46		3·90	3·87	3·84	+ ·06		·09	
			·0412		15·5		·0242		·59					+ ·06		·08
9	8·62	12·5		28·0		·0232		·29		3·70	3·80	3·78	— ·08		·08	
			·0420		13·0		·0246		·59					+ ·02		·01
10	9·62	25·0		38·0		·0186		·46		3·85	3·83	3·77	+ ·08		·18	
			·0436		14·5		·0222		·51					+ ·11		·28
11	10·66	25·0		39·5		·0150		·38		4·05	3·97	3·66	+ ·39		3·90	
			·0100		28·0		·0086		·86					+ ·13		1·46
12	10·90	25·0		53·0		·0150		·37		3·25	3·63	3·53	— ·28		2·02	
			·0626		12·0		·0198		·32					+ ·33		1·81
13	12·39	25·0		37·0		·0092		·23		3·05	3·24	3·20	— ·15		·54	
			·0012		35·5		·0010		(·83)					·00		·00
14	12·42	25·0		60·5		·0090		·22		3·35	3·28	3·20	+ ·15		·60	
			·0008		57·5		·0008		(1·00)					+ ·01		·02
15	12·44	25·0		82·5		·0090		·23		3·10	3·23	3·19	— ·09		·21	
			·0110		43·0		·0086		·78					+ ·03		·11
								5·50	10·82						14·87	6·65

Index a	1879 Juli	v_a	$\frac{1}{v_{a,a+1}}$	u_a	$u_{a,a+1}$	$M^2(x_a)$	$M^2(x_a-x_{a+1})$	$v_a M^2(x_a)$	$v_{a,a+1} M^2(x_a-x_{a+1})$	z_a	y_a	x_a	z_a-x_a	x_a-x_{a+1}	$v_a(z_a-x_a)^2$	$v_{a,a+1}(x_a-x_{a+1})^2$
								5.50	10·82						14·87	6·65
16	12·70	25·0		68·0		0·0120		0.30		3·05	3·16	3·16	—0·11		·28	
			0·0404		18·0		0·0202		0·50					+ ·02		·01
17	13·66	25·0		43·0		·0170		·43		3·05	3·10	3·13	— ·08		·17	
			·0454		14·5		·0212		·47					— ·07		·11
18	14·74	25·0		39·5		·0132		·33		3·30	3·23	3·20	+ ·10		·24	
			·0012		37·5		·0012		(1·00)					·00		·00
19	14·77	12·5		50·0		·0130		·16		3·30	3·24	3·20	+ ·10		·12	
			·0232		23·0		·0138		·59					+ ·05		·11
20	15·32	12·5		35·5		·0102		·13		3·20	3·23	3·15	+ 0·5		·03	
			·0016		33·5		·0016		(1·00)					+ ·01		·01
21	15·36	25·0		58·5		·0098		·24		3·05	3·15	3·15	— ·10		·24	
			·0092		38·0		·0072		·78					·00		·00
22	15·58	25·0		63·0		·0090		·22		3·20	3·17	3·14	+ ·06		·20	
			·0004		61·5		·0004		(1·00)					·00		·00
23	15·59	12·5		74·0		·0090		·11		3·10	3·16	3·14	— ·04		·02	
			·0046		55·0		·0040		·87					·00		·01
24	15·70	25·0		80·0		·0102		·26		3·20	3·17	3·14	+ ·06		·10	
			·0420		18·5		·0160		·38					+ ·11		·32
25	16·70	12·5		31·0		·0108		·14		3·20	3·18	3·02	+ ·18		·40	
			·0012		30·0		·0008		(·67)					·00		·02
26	16·73	25·0		55·0		·0106		·26		3·20	3·19	3·02	+ ·18		·84	
			·0072		39·5		·0060		·83					+ ·07		·64
27	16·90	12·5		52·0		·0104		·13		3·30	3·22	2·95	+ ·35		1·54	
			·0012		49·0		·0012		(1·00)					+ 0·2		·22
28	16·93	25·0		74·0		·0104		·26		2·55	2·99	2·94	— ·39		3·67	
			·0310		22·5		·0146		·47					+ ·13		·54
29	17·67	25·0		47·5		·0106		·27		2·85	2·92	2·81	+ ·05		·05	
			·0012		45·0		·0012		(1·00)					+ ·01		·03
30	17·70	12·5		57·5		·0104		·13		2·60	2·85	2·80	— ·20		·49	
			·0088		38·0		·0070		·80					+ ·03		·07
31	17·91	25·0		63·0		·0104		·26		2·60	2·75	2·77	— ·17		·75	
			·0008		60·0		·0008		(1·00)					— ·00		·00
32	17·93	12·5		72·5		·0106		·13		2·80	2·76	2·77	+ ·03		·01	
			·0302		22·5		·0148		·49					— ·03		·04
33	18·65	12·5		35·0		·0108		·13		2·80	2·77	2·81	— ·01		·00	
			·0004		34·5		·0004		(1·00)					— .00		·00
34	18·66	25·0		59·5		·0106		·27		3·20	2·95	2·81	+ ·39		3·82	
			·0106		36·5		·0082		·77					+ ·09		·80
35	18·91	12·5		49·0		·0106		·13		2·70	2·89	2·72	— ·02		·00	
			·0004		48·0		·0004		(1·00)					+ ·00		·04
36	18·92	25·0		73·0		·0106		·26		2·70	2·82	2·72	— ·01		·00	
			·0306		22·5		·0146		·48					+ ·24		1·94
37	19·65	25·0		47·5		·0106		·27		2·25	2·52	2·47	— ·22		1·20	
			·0004		46·5		·0004		(1·00)					·00		·00
38	19·66	12·5		59·0		·0106		·13		2·60	2·54	2·47	+ ·13		·22	
			·0106		36·0		·0082		·77					+ 0·5		·19
39	19·91	25·0		61·0		·0108		·27		2·40	2·48	2·42	— ·02		·01	
			·0004		59·5		·0004		(1·00)					·00		·00
40	19·92	12·5		72·0		·0108		·13		2·30	2·45	2·42	— ·12		·18	
			·0306		22·5		·0152		·50					+ 0.6		·13
								10.85	30·19						29·45	11·88

Index a	1879 Juli	v_a	$\frac{1}{v}_{a,a+1}$	u_a	$u_{a,a+1}$	$M^2(x_a)$	$M^2(x_a-x_{a+1})$	$v_aM^2(x_a)$	$v_{a,a+1}M^2(x_a-x_{a+1})$	z_a	y_a	x_a	z_a-x_a	x_a-x_{a+1}	$v_a(z_a-x_a)^2$	$v_{a,a+1}(x_a-x_{a+1})$
								10·85	30·19						29·45	11·88
41	20·65	12·5		35·0		0·0116		0·15		2·00	2·29	2·37	−0·36		1·67	
			0·0004		34·5		0·0004		(1·00)					0·00		·00
42	20·66	25·0		59·5		·0114		·28		2·25	2·27	2·37	− ·12		·34	
			·0100		37·5		·0080		·80					− ·06		·32
43	20·90	12·5		50·0		·0132		·17		2·50	2·33	2·42	+ ·08		·09	
			·0008		48·0		·0008		(1·00)					·00		·00
44	20·92	12·5		60·5		·0134		·17		2·60	2·39	2·43	+ ·18		·41	
			·0362		19·0		·0212		·59					− ·08		·20
45	21·78	12·5		31·5		·0206		·26		2·60	2·47	2·51	+ ·10		·12	
			·0004		31·0		·0006		(1·50)					·00		·00
46	21·79	12·5		43·5		·0208		·26		2·30	2·42	2·51	− ·20		·52	
			·2046		4·5		·0322		·16					− ·78		3.00
47	26·66	25·0		29·5		·0142		·35		3·20	3·08	3·29	− ·10		·23	
			·0012		28·5		·0012		(1·00)					− ·01		·03
48	26·69	12·5		41·0		·0138		·17		4·00	3·36	3·30	+ ·70		6·09	
			·0088		30·0		·0076		·87					+ ·02		·06
49	26·90	12·5		42·5		·0134		·17		3·40	3·37	3·28	+ ·12		·18	
			·0008		41·0		·0008		(1·00)					·00		·02
50	26·92	12·5		53·5		·0136		·17		3·20	3·33	3·28	− ·08		·07	
			·0310		20·0		·0170		·55					+ ·09		·28
51	27·66	12·5		32·5		·0130		·16		2·50	3·01	3·18	− ·68		5·83	
			·0004		32·0		·0004		(1·00)					·00		·01
52	27·67	12·5		44·5		·0132		·17		3·70	3·21	3·19	+ ·51		3·32	
			·0100		31·0		·0080		·80					+ ·01		·01
53	27·91	12·5		43·5		·0130		·16		3·10	3·18	3·18	− ·05		07	
			·0004		42·5		·0006		(1·50)					·00		·00
54	27·92	12·5		55·0		·0130		·16		3·40	3·23	3·18	+ ·22		·63	
			·0316		20·0		·0162		·51					+ ·09		·25
55	28·67	25·0		45·0		·0114		·28		3·05	3·13	3·09	− ·04		·03	
			·0004		44·0		·0004		(1·00)					·00		·00
56	28·68	12·5		56·5		·0114		·14		2·90	3·08	3·09	− ·19		·44	
			·0092		37·5		·0074		·80					·00		·00
57	28·90	12·5		50·0		·0122		·15		3·20	3·11	3·09	+ ·11		·15	
			·0008		48·0		·0008		(1·00)					·00		·00
58	28·92	12·5		60·5		·0124		·16		3·20	3·13	3·09	+ ·11		·15	
			·0306		21·0		·0162		·53					+ ·07		·16
59	29·65	12·5		33·5		·0130		·16		2·90	3·04	3·02	− ·12		·18	
			·0004		33·0		·0004		(1·00)					·00		·00
60	29·66	12·5		45·5		·0128		·16		3·10	3·06	3·02	+ ·08		·08	
			·0100		31·5		·0080		·80					+ ·02		·03
61	29·90	12·5		44·0		·0124		·15		3·00	3·04	3·00	·00		·00	
			·0008		42·5		·0008		(1·00)					·00		·00
62	29·92	12·5		55·0		·0126		·16		3·00	3·03	3·00	·00		·00	
			·0298		21·0		·0148		·50					+ ·05		·09
63	30·63	25·0		46·0		·0092		·23		3·05	3·04	2·95	+ ·10		·26	
			·0008		44·0		·0010		(1·25)					·00		·00
64	30·65	12·5		56·5		·0088		·11		2·90	3·01	2·95	− ·05		·03	
			·0008		54·5		·0006		(·75)					·00		·00
65	30·67	25·0		79·5		·0088		·22		2·95	2·99	2·95	+ ·01		·00	
			·0096		45·0		·0074		·77					+ ·04		·14
								15·57	51·87						50·34	16·48

Index a	1879 Juli	v_a	$\frac{1}{v_{a,a+1}}$	u_a	$u_{a,a-1}$	$M^2(x_a)$	$M^2(x_a-x_{a+1})$	$v_aM^2(x_a)$	$v_{a,a+1}M^2(x_a-x_{a+1})$	z_a	y_a	x_a	z_a-x_a	x_a-x_{a+1}	$v_a(z_a-x_a)^2$	$v_{a,a+1}(x_a-x_{a+1})^2$
								15·57	51·87						50·34	16·48
66	30·90	12·5		57·5		0·0104		·13		3·00	2·99	2·91	+0·09		·11	
			0·0008		55·0		0·0008		(1·00)					0·00		·02
67	30·92	25·0		80·0		·0104		·26		2·65	2·89	2·91	— ·26		1·65	
			·0316		22·5		·0186		·59					— ·05		·10
68	31·67	12·5		35·0		·0184		·23		3·00	2·93	2·96	+ ·04		·02	
			·0004		34·5		·0004		(1·00)					·00		·00
69	31·68	12·5		47·0		·0184		·23		3·00	2·95	2·96	+ ·04		·02	
			·1150		7·5		·0320		·28					— ·10		·08
70	34·42	12·5		20·0		·0200		·25		3·30	3·17	3·06	+ ·24		·75	
			·0008		19·5		·0012		(1·50)					·00		·01
71	34·44	12·5		32·0		·0200		·25		3·00	3·10	3·06	— ·05		·04	
			·0004		31·5		·0006		(1·50)					·00		·02
72	34·45	12·5		44·0		·0202		·25		2·90	3·04	3·06	— ·15		·28	
			·0946		8·5		·0496		·52					— ·02		·02
73	36·70	12·5		21·0		·0476		·60		3·10	3·08	3·08	+ ·02		·01	
								17·77	58·26						53·22	16·73
									—2·03							
									56·23							

At Summen af $\sum v_aM^2(x_a) + \sum v_{a,a+1} M^2(x_a - x_{a+1})$ ikke nøjagtigt bliver lig $= 74$, maa i det væsentlige tilskrives den usikre Bestemmelse af de indklamrede Addender i Summens andet Led, svarende til meget smaa Mellemtider. Til Bestemmelse af E'_v haves altsaa i $74 - 17·77 = 56·23$ overskydende Ligninger en Kvadratsum $= 53·22$, og derhos ved de til Middeltal sammentrukne Observationer i 36 Ligninger en Kvadratsum $= 12·5 \times 2·902 = 36·27$, ialt altsaa 92·23 Ligninger med Kvadratsum 89·46, følgelig $E'_v = 1·03$. For E'_w haves derimod $73 - 56·23 = 16·77$ overskydende Ligninger og Kvadratsummen 16·73 altsaa $E'_w = 1·00$. Overensstemmelsen er altsaa god nok; og Resultatet er altsaa, at den absolute Vægt paa en enkelt Koincidensobservation har været 12·9 svarende til en Middelfejl $= \pm 0·278 = \pm 0''073$, medens Mikrometrets Stabilitet i 1 Dag Stjernetid maales med den absolute Vægt 23·8 svarende til en Middelafvigelse i samme Tid $= \pm 0·205 = \pm 0''054$. Med Hensyn til vor Antagelse, at Vægtene simpelthen skulle have været omvendt proportionale med Intervallernes Længde, ses det af følgende mere specificerede Tabel,

Intervallet	oversk. Ligninger	Kvadratsum	E'_w
mindre end 0·5 Dag	3·69	4·91	0·75
mellem 0·5 og 1· Dag	7·08	6·15	1·15
over 1 Dag	6·00	5·67	1·06,

at Vægtene vel synes at skulle være satte noget mindre i de korte Intervaller, hvor Mikrometret har været stærkt benyttet, men at dette Resultat paa Grund af det ringe Antal overskydende Ligninger, er saa usikkert, at det ingenlunde er nødvendigt, at modificere Antagelsen om, at Mikrometrets større eller mindre Brug har været uden Indflydelse paa dets Stabilitet. Spørgsmaalet, om der viser sig Spor af systematisk Fejl efter denne Udjevning, kan af samme Grund heller ikke besvares paa afgjørende Maade. Det Fænomen i Tabellerne over Fejlene, som kunde siges at antyde en Fejlenes Afvigelse fra den exponentielle Fejllov, nemlig det ringe Antal Tegnskifter i Differenserne $x_a - x_{a+1}$, kan vel neppe siges at bevise en saadan Afvigelse, men paa den anden Side er det i sig selv ret sandsynligt, at Mikrometrets Forandringer for en væsentlig Del kunne skyldes Temperaturvexlinger, og at det omtalte Fænomen kunde staa i Forbindelse dermed. Dog vilde det, selv om de fornødne Thermometeriagttagelser forelaa, neppe have betalt sig, at have taget Hensyn til dem.

Jeg skal endnu kun, for at oplyse Brugen af Ligning (16) med et Exempel, beregne Koincidenspunktet og dets aposterioriske Middelfejl for det lange Interval mellem 21de og 26de Juli. Man finder her for de mellemliggende Tider t_b:

$$p = \frac{26{\cdot}66 - t_b}{4{\cdot}87}$$

$$\begin{aligned} x_b &= 2{\cdot}51p + 3{\cdot}29(1-p) \\ &= 3{\cdot}29 - 0{\cdot}78p \\ M^2(x_b) &= 0{\cdot}0208p + 0{\cdot}0142(1-p) + 0{\cdot}1724p(1-p) \\ &= 0{\cdot}0142 + 0{\cdot}1790p - 0{\cdot}1724p^2, \end{aligned}$$

altsaa følgende Bestemmelser:

t	x	rimelige Grændser
21·79	2·51 ± 0·14	2·37 til 2·65
22.00	2·54 ± 0·17	2·37 — 2·71
23·00	2·70 ± 0·23	2·47 — 2·93
24·00	2·86 ± 0·25	2·61 — 3·11
25·00	3·02 ± 0·23	2·79 — 3·25
26·00	3·18 ± 0·19	2·99 — 3·37
26·66	3·29 ± 0·12	3·17 — 3·41.

Usikkerheden har Maximum den 24·13 Juli med Middelfejl ± 0·246, altsaa er den heraf følgende Bestemmelse for x i dette Interval overalt nøjagtigere, end hvad der kunde være opnaaet ved en enkelt Observation af Koincidensen.